

基于分数阶理论的带电纤维材料渗流分形模型

李宇鹏, 陈丰业, 肖波齐, 涂必亮

(武汉工程大学机电工程学院, 湖北武汉 430205)

摘要

- 本文采用空间分数导数和分形几何分别对幂律流体和纤维多孔介质进行了表征。在此基础上, 研究了在双电层存在下, 分数阶幂律流体在单纤维毛细管中层流动。
- 基于分形毛细管束模型和广义达西定律导出了总体纤维材料的渗透率解析式, 进而讨论结构特性、流体非线性流变行为和Zeta电势等参数对无量纲渗透率的影响。
- 结果表明, 分数阶对Zeta电势对渗透率的影响有明显的尺度效应。

引言

- 由于多孔介质内孔道的复杂无序性, 传统的整数维数几何理论无法表征, 但分形理论的提出, 为准确估计多孔介质空间特征的复杂性提供了便利。
- 事实上, 多孔介质的表面通常是带电的。一层薄薄的双电层是由固体带电表面吸引的流体阳离子堆积而成, 可以在狭窄的毛细管中引起电渗现象。
- 虽然有学者考虑了这种现象对运输过程的影响, 但对于流体的非线性行为与电渗现象对渗透率的耦合作用还没有完整的论述。考虑到速度的非局部依赖性对流体动力学的影响, 孙等采用分数阶导数建立了统一的非线性应力-应变关系来描述幂律流体的特殊行为。
- 本文用分数阶导数描述幂律流体在具有对称电势分布的窄柱状毛细管中的非线性流动行为及其速度分布。利用分形理论进一步建立纤维状多孔介质渗透率的解析式。在此基础上, 讨论了结构特征、流体非线性流变行为和表面电势对无量纲渗透率的影响

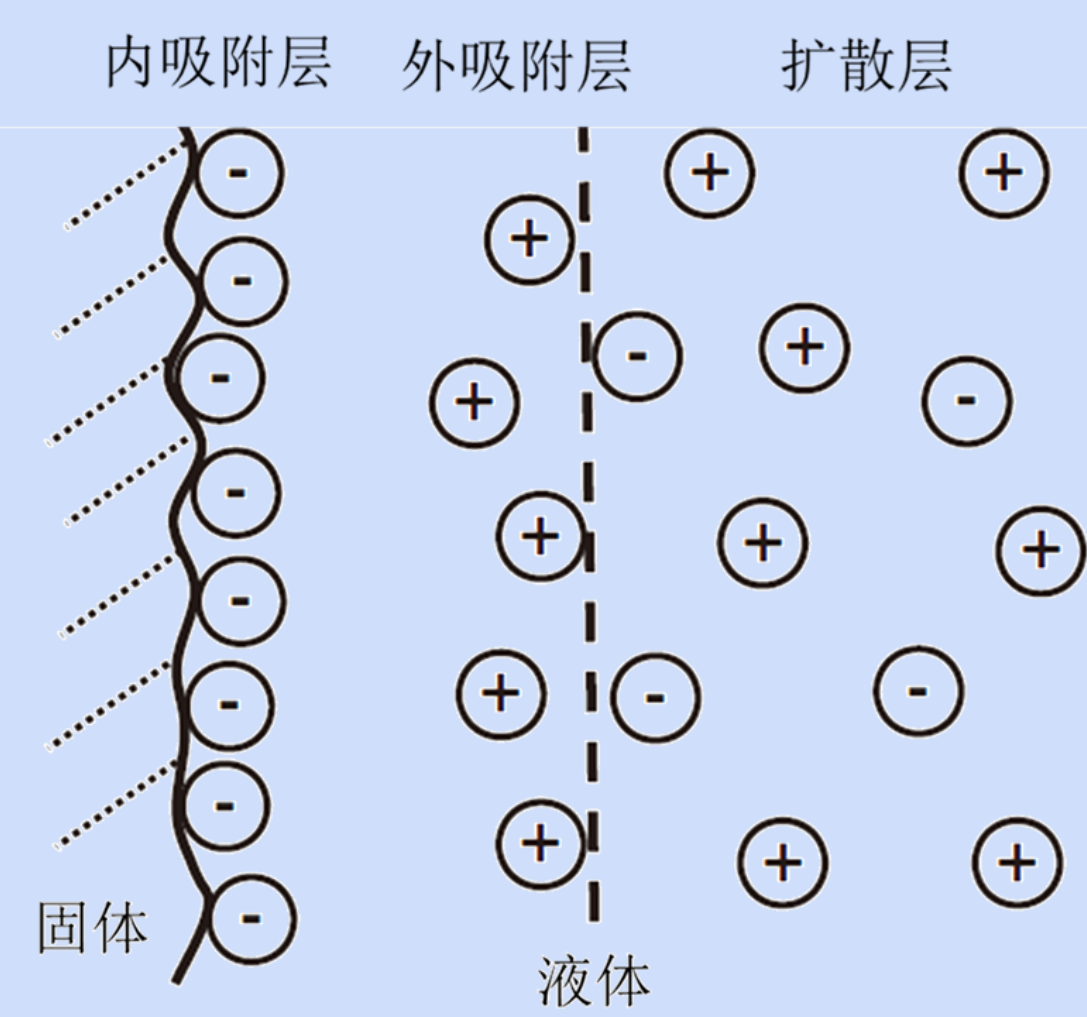
模型计算

- 考虑圆柱形带电毛细管中的流体离子场, 基于德拜-休克尔近似, 泊松-玻尔兹曼方程无量纲形式及其解:

$$\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \frac{d\psi^*}{dr^*} \right) = k^2 \psi^* = \rho_e^*$$

$$\begin{cases} r^* = 0, & \frac{d\psi^*}{dr^*} = 0 \\ r^* = 1, & \psi^* = 1 \end{cases}$$

$$\rho_e^* = k^2 \psi^* = k^2 \frac{I_0(kr^*)}{I_0(k)}$$



带电毛细管内速度分布

- 在毛细微通道中, 流体是由外部压力和电场力驱动的。在推导模型之前, 假设如下:

- (1) 无滑移边界条件;
 - (2) 不考虑重力场;
 - (3) 充分发展的稳定层流。
- 毛细管流体平衡方程可表示为:

$$\Delta p_z \cdot A - \tau \cdot S - F_z \cdot V = 0$$

- 考虑到非牛顿流体流动的非局域性, 在没有初始屈服应力的情况下, 幂律流体的本构关系可以用分数阶速度梯度形式来描述, 因而可以得到如下形式:

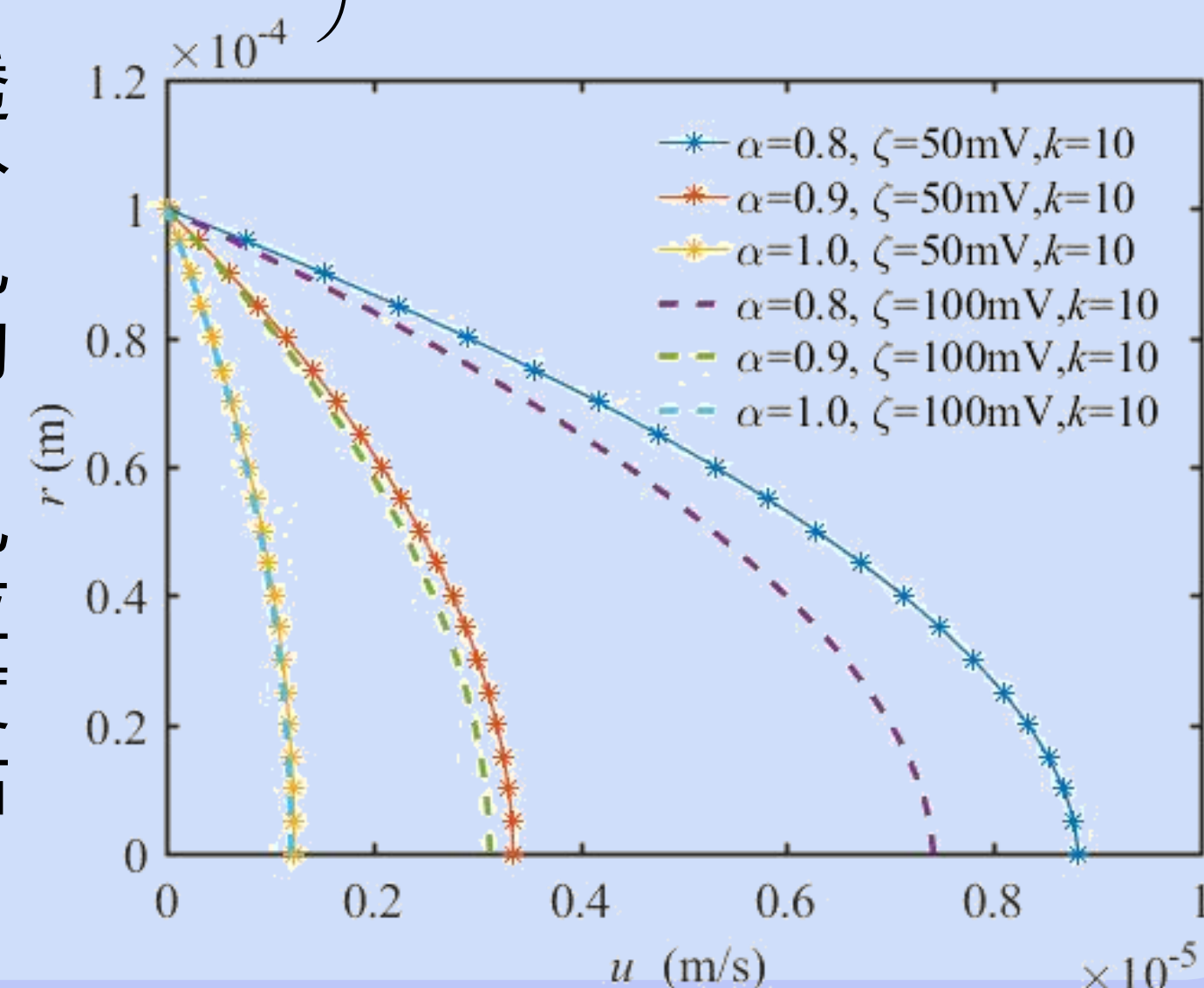
$$\mu \frac{d^\alpha u}{dr^\alpha} = \frac{\Delta p_z}{2l} r + \frac{\rho_e^2 u}{2\lambda} r$$

- 考虑小半径近似和泰勒近似, 可以获得:

$$q = \frac{\pi P_z R^{3+\alpha}}{2\mu(3+\alpha)\Gamma(1+\alpha)} \left(1 - \frac{(\rho_{e,av}^*)^2 \Theta_1}{2\Gamma(2+\alpha)} + O(\Theta_1^2) \right)$$

- 右图描述了分数阶、Zeta电势和电渗透半径变化时毛细管截面速度分布。分数阶代表了不同流体的记忆能力, 电渗透半径和Zeta电势反映了EDL产生的电粘阻力。

- 对于记忆能力较强的流体, 增大Zeta电势和电渗透半径所产生的电粘性效应对流体速度分布影响较小。对于速度分布较陡的流体, 分数阶小于1, 电粘度对速度分布的影响更为显著。



带电纤维多孔介质的渗透率

- 根据分形多孔介质运输理论, 毛细管的数量与毛细管半径之间的关系可以用分形标度定律确定:

$$N(\geq R) = \left(\frac{R_{\max}}{R} \right)^{D_f} \quad \text{归一化条件为: } (R_{\min}/R_{\max})^{D_f} = \delta^{D_f} \approx 0$$

- 总体积流量从而获得带电纤维渗透率的无量纲解析式

$$Q = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} q(-dN) = \frac{\pi P_z D_f R^{3+\alpha}}{2\mu(3+\alpha)\Gamma(1+\alpha)} \left[\frac{1-\delta^{(3+\alpha-D_f)}}{3+\alpha-D_f} - \frac{1-\delta^{2\alpha-D_f}}{2\alpha-D_f} \frac{(\rho_{e,av}^*)^2 \Theta_2}{2\Gamma(2+\alpha)} \right]$$

- 通过广义达西定律, 要获得渗透率, 还需计算出表观粘度, 即

$$\mu_\alpha = \frac{\tau_t}{\gamma_t} = \mu R_{\max}^{1-\alpha} \Gamma(1+\alpha) \frac{\alpha-D_f}{1-D_f} \frac{1-\delta^{1-D_f}}{1-\delta^{\alpha-D_f}}$$

- 因此, 多孔介质渗透率解析式

$$K = \frac{Q \mu_\alpha}{A P_z} = \frac{\pi D_f R_{\max}^4}{2A(3+\alpha)} \frac{(\alpha-D_f)}{1-D_f} \frac{1-\delta^{1-D_f}}{1-\delta^{\alpha-D_f}} \left[\frac{1-\delta^{(3+\alpha-D_f)}}{3+\alpha-D_f} - \frac{1-\delta^{2\alpha-D_f}}{2\alpha-D_f} \frac{(\rho_{e,av}^*)^2 \Theta_2}{2\Gamma(2+\alpha)} \right]$$

- 对于纤维多孔介质, 最大毛细半径、平均孔径和平均纤维直径之间的转换关系如下:

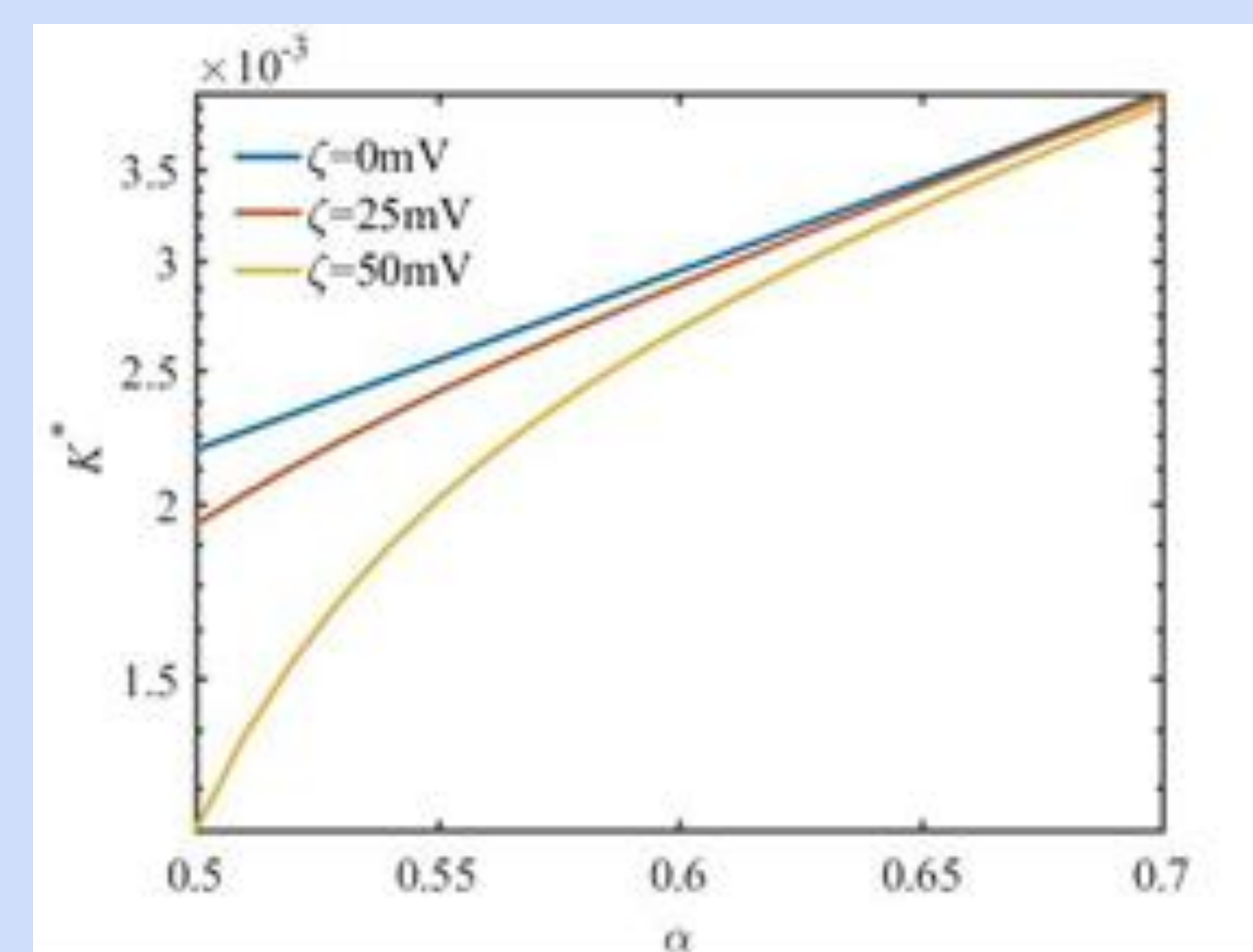
$$R_{av,c} = \left(\frac{D_f}{4-D_f} \right)^{\frac{1}{4}} R_{\max}, R_{av,f} = \frac{1-\phi}{\phi} R_{av,c}$$

- 从而获得带电纤维渗透率的无量纲解析式

$$K^* = \frac{K}{R_{av,f}^2} = \frac{1}{2(3+\alpha)} \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right)^3 \frac{1-\delta^{1-D_f}}{1-\delta^{\alpha-D_f}} \left(\frac{4-D_f}{D_f} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(\alpha-D_f)(2-D_f)}{1-D_f} \times \left[\frac{1-\delta^{(3+\alpha-D_f)}}{3+\alpha-D_f} - \frac{1-\delta^{2\alpha-D_f}}{2\alpha-D_f} \frac{(\rho_{e,av}^*)^2 \Theta_2}{2\Gamma(2+\alpha)} \right]$$

结果

- 右图给出了不同Zeta电势下无量纲渗透率与分数阶的关系。
- 从图中可以看出, 无因次渗透率随分数阶的增加而迅速增加。
- 分数阶越小, Zeta电势对无因次渗透率的影响越明显, 且随着分数阶的增大, Zeta电势对无因次渗透率的影响开始缩小并逐渐消失。



基金资助项目 (国家自然科学基金资助, No. 51576114)

email: xiaoboqi2006@126.com

参考文献:

- Liang MC, Yang SS and Yu BM. A fractal streaming current model for charged microscale porous media, J. Electrostat. 2014,72:441-446.
- Zhu QY. and Li Y. Numerical simulation of the transient heat and liquid moisture transfer through porous textiles with consideration of electric double layer, Int. J. Heat Mass Transf. 2010,53:1417-1425
- Rice CL. and Whitehead R. Electrokinetic flow in a narrow cylindrical capillary, The Journal of Physical Chemistry.1965,69:4017-4024.
- Sun H, Zhang Y, Wei S, Zhu J, and Chen W. A space fractional constitutive equation model for non-Newtonian fluid flow. Commun. Nonlinear. Sci. 2018, 62: 409-417.
- Yu BM, Lee LJ and Cao HQ. A fractal in-plane permeability model for fabrics. Polym. Compos. 2002,23: 201-221.