

## 介绍

如何更快排出容器中的水？这是水利运输、农业灌溉、食品行业中人们比较关心的问题。我们结合实验与理论对此问题进行探究，在实验上探究了容器旋转速率对排水时间的影响，发现了瓶口处气腔拉长（见图1(b)）的实验现象；从理论上建立了气腔被拉长的基本模型，分析得到排流时间与旋转速率之间的尺度律关系，与实验结果一致。相对于静止容器，旋转的容器最大可以降低约45%的排水时间。

## 实验结果

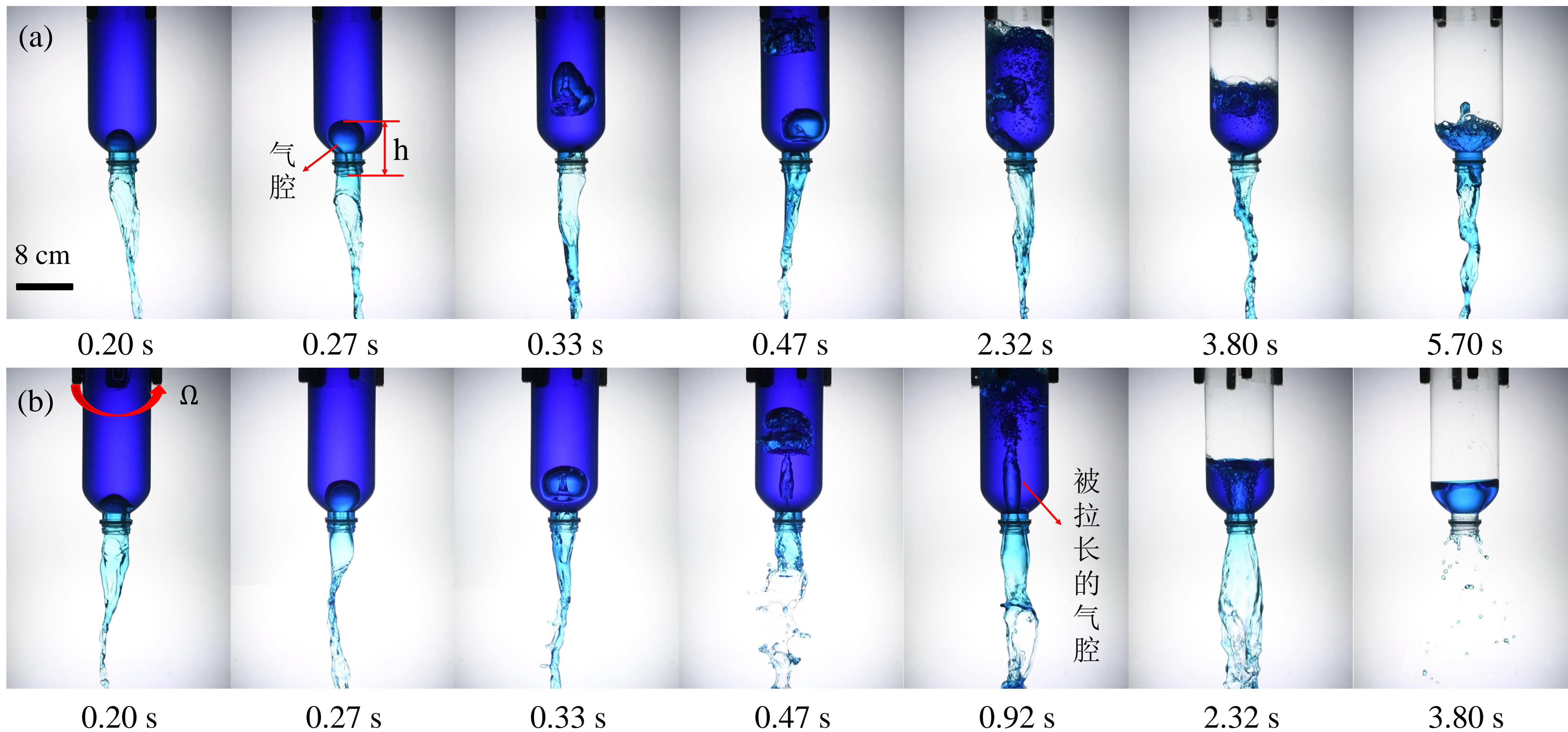


图1 不同旋转条件下的容器排水过程。(a) 静置排水，转速 $\Omega = 0$ ；(b) 容器旋转排水， $\Omega = 100$  rpm。

### 实验结果分析

- 容器静止排水，空气以大气泡形式间歇进入，水沿着瓶口壁面流出，气泡上浮缓慢导致排水缓慢<sup>[1]</sup>；
- 容器低速转动排水，初期空气还是以气泡形式进入容器内，后期被离心力拉长的气腔与上液面连通，加快空气进入促进排水，因此可以通过提高转速降低容器排水时间；
- 存在临界转速 $\Omega_0$ ，当容器转速 $\Omega > \Omega_0$ 时，提高转速对降低排水时间的作用不再明显，相对于静止容器排水旋转容器排水时间最高约降低45%。

## 理论分析

### ◆ 排水时间尺度律分析

容器排水快慢由瓶口进气速度决定<sup>[2]</sup>，考虑气体等压，可联立伯努利方程、质量与动量守恒关系式：

$$\begin{cases} gh = v_{\perp}^2/2 + g h_T \\ \frac{\pi}{2} \Omega \Delta h_1 \left(\frac{D}{2}\right)^4 = \frac{\pi}{2} \Omega_2 \Delta h_2 \left(\frac{d}{2}\right)^4 \\ \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \Delta h_1 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Delta h_2 \end{cases}$$

其中 $v_{\perp}$ 、 $v_{\parallel}$ 是周向、轴向的流速， $\Delta h_1$ 、 $\Delta h_2$ 是微元厚度， $\Omega$ 对应容器的转速。

由上三式可得到瓶身转动时，被拉长的气腔高度为 $\bar{h} = h_0 + h_c$ ，瓶内平均排气速率 $\frac{dV}{dt} = f \times (\bar{h} \times \pi \bar{r}^2)$ ，气泡产生频率 $f$ 以及横向尺寸 $\bar{r}^2$ 受瓶口限制近似为常量。

量。即 $\frac{dV}{dt} \propto \bar{h}$ ，则可得到排水时间与瓶身转速的关系：

$$T \propto (dV/dt)^{-1} \propto \bar{h}^{-1} \propto \left( \frac{D^4}{4g} \left( \frac{\Omega}{d} \right)^2 + h_c \right)^{-1}$$

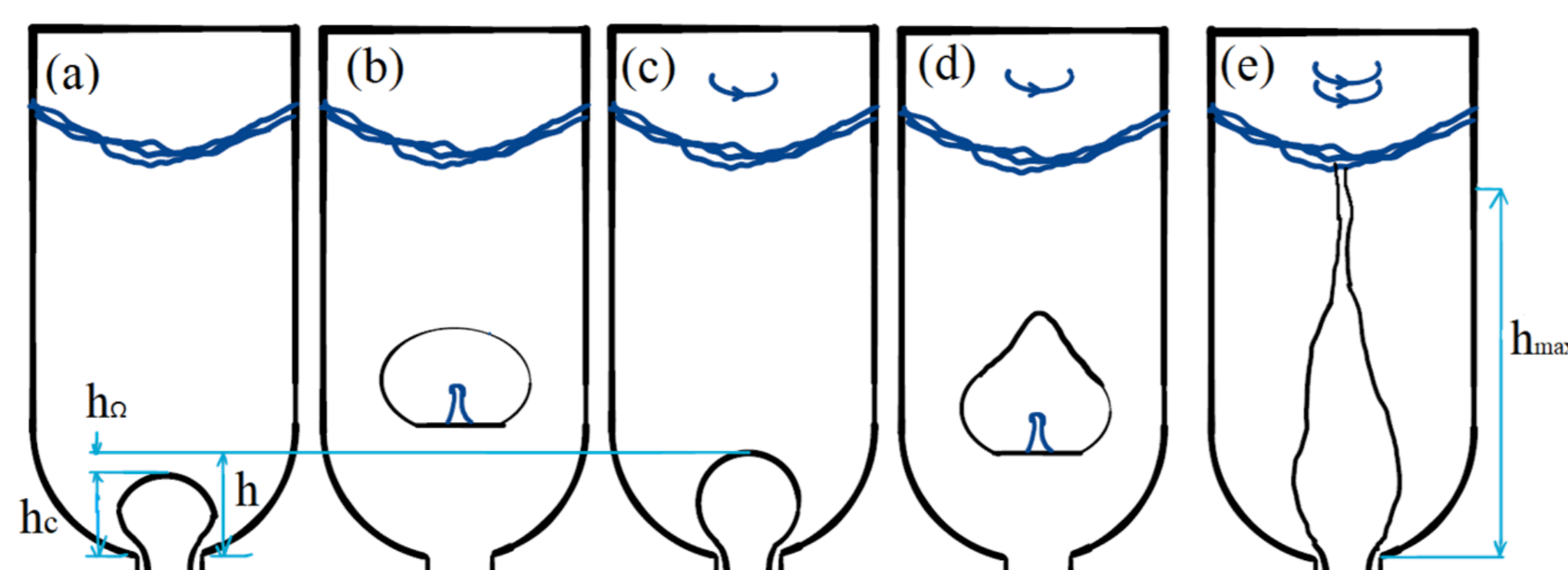


图2 气腔演化示意：a), b)  $\Omega = 0$ ；c), d)  $\Omega < \Omega_0$ 时，气泡轴向拉伸变形；e)  $\Omega = \Omega_0$ ，气腔被拉长至液面。

### ◆ 临界转速计算

气腔拉长至液面最高时，内外气体连通，排水最快： $\frac{D^4}{4g} \left( \frac{\Omega}{d} \right)^2 + h_c \approx h_{max}$

此时得到临界转速： $\Omega_0 \approx 2\sqrt{g(h_{max} - h_c)} \frac{d}{D^2} = 109$  rpm

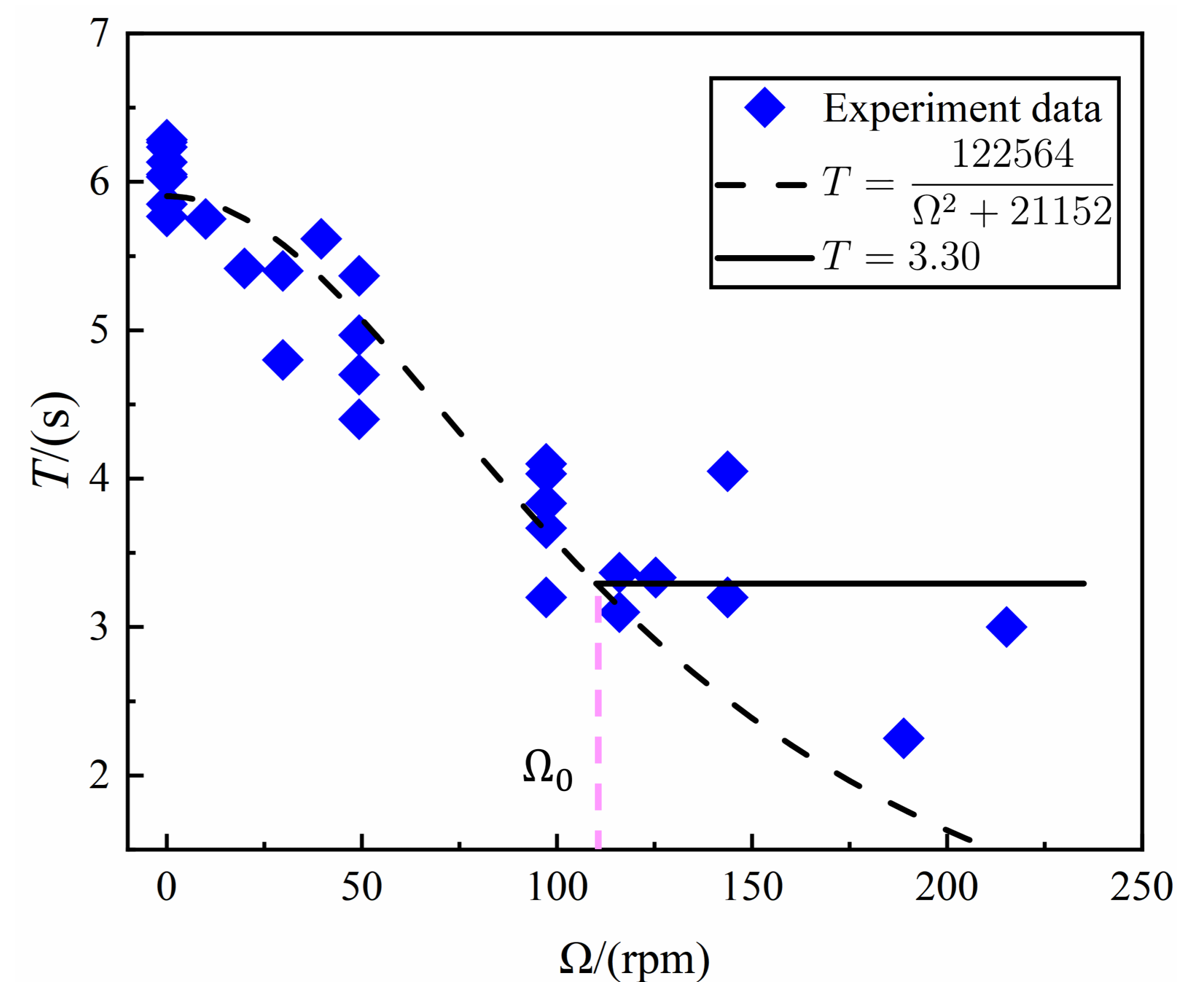


图3 容器旋转速率与排水时间关系，蓝点为实验结果，黑色虚线为排水时间尺度律，粉色虚线对应转速为临界转速，黑色实线为转速超过临界转速对应排水时间。

## 结论

- 研究发现，使容器旋转可以减少排水时间，相对于容器静止排水最大可减少约45%；
- 通过理论分析，我们得到了容器排水时间与转速之间的尺度律关系，且与实验结果符合良好；
- 旋转容器排水存在临界转速，超过临界转速排水时间不再减小。

[1] Rohilla, L., & Das, A. K. (2020). Fluidics in an emptying bottle during breaking and making of interacting interfaces. *Physics of Fluids*, 32(4), 042102.

[2] Clanet, C., & Searby, G. (2004). On the glug-glug of ideal bottles. *Journal of Fluid Mechanics*, 510, 145-168.