均匀各向同性湍流中的结构函数模型与瓶颈效应预测

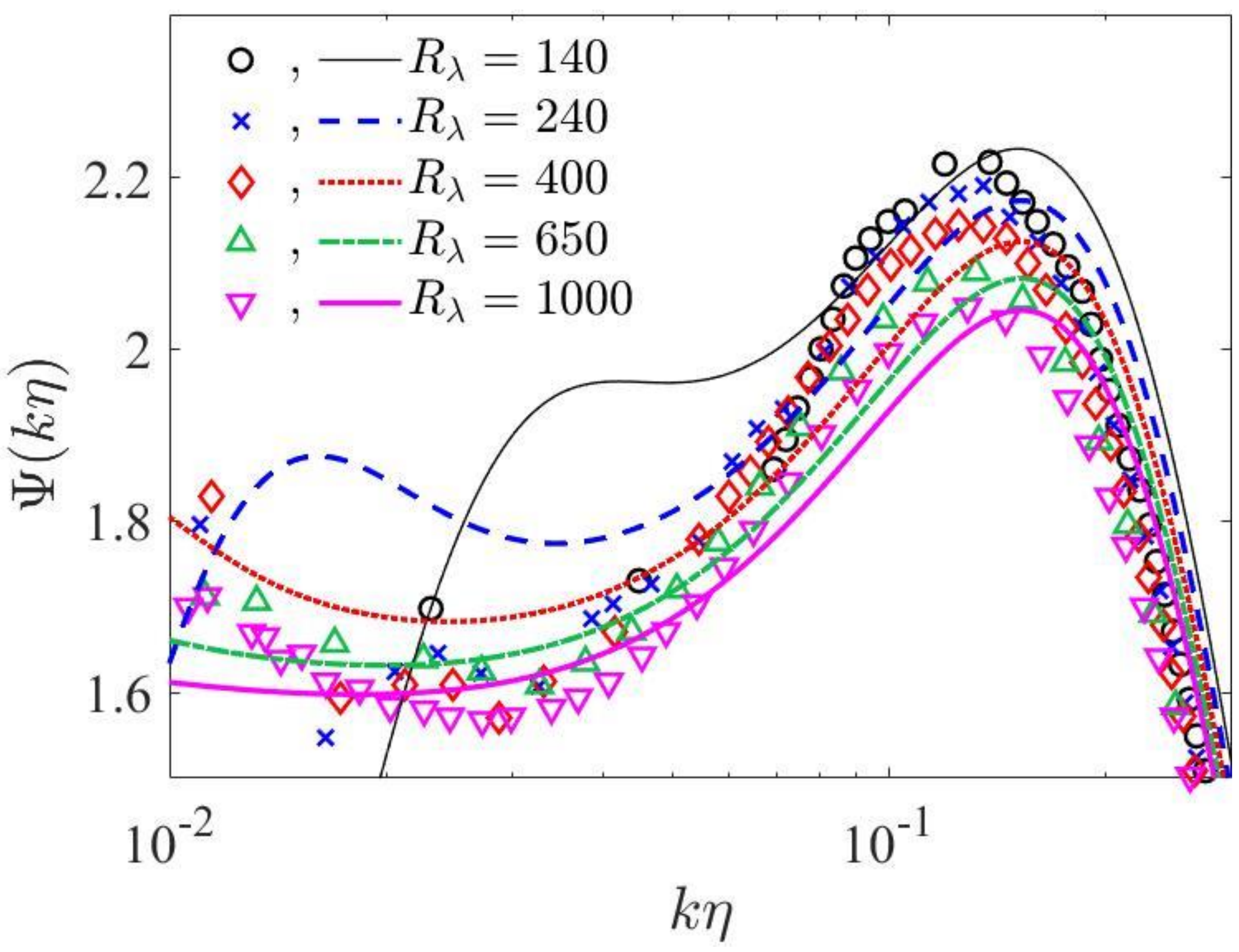
苏豪，杨越

北京大学工学院湍流与复杂系统国家重点实验室，北京 100871

引言

瓶颈效应

- 由K41理论得到能谱的-5/3律：$E(k)=C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$
- 从-5/3律定义三维补偿能谱：$\Psi(k\eta)\equiv\varepsilon^{-2/3}k^{5/3}E(k)$
- 在 $\Psi(k\eta)$ 的惯性区与耗散区的交界处可观察到鼓包，此即为瓶颈效应



DNS（符号）与本模型（曲线）给出的补偿能谱

鼓包的特征量及其性质

- 鼓包峰值位置 k_b
- 鼓包峰值高度 $\Psi_b\equiv\Psi(k_b\eta)$
- $k_b\eta\approx0.13, \Psi_b\sim R_\lambda^{-0.04}$ [1]

模型

二阶纵向结构函数模型：

$$D_{LL}(r)=C_D\left(\frac{r^2}{r^2+A\eta^2}\right)^\alpha\left(\frac{r^2}{r^2+BL^2}\right)^\beta$$

从K41理论给出的渐进性质可得：

$$\begin{cases} D_{LL}\to\dfrac{\varepsilon}{15\nu}r^2=C_D\left(\dfrac{r^2}{A\eta^2}\right)^\alpha\left(\dfrac{r^2}{BL^2}\right)^\beta, & r\ll\eta \\ D_{LL}\to C_2(\varepsilon r)^{2/3}=C_D\left(\dfrac{r^2}{BL^2}\right)^\beta, & \eta\ll r\ll L \\ D_{LL}\to 2\sigma^2=C_D, & r\gg L \end{cases}$$

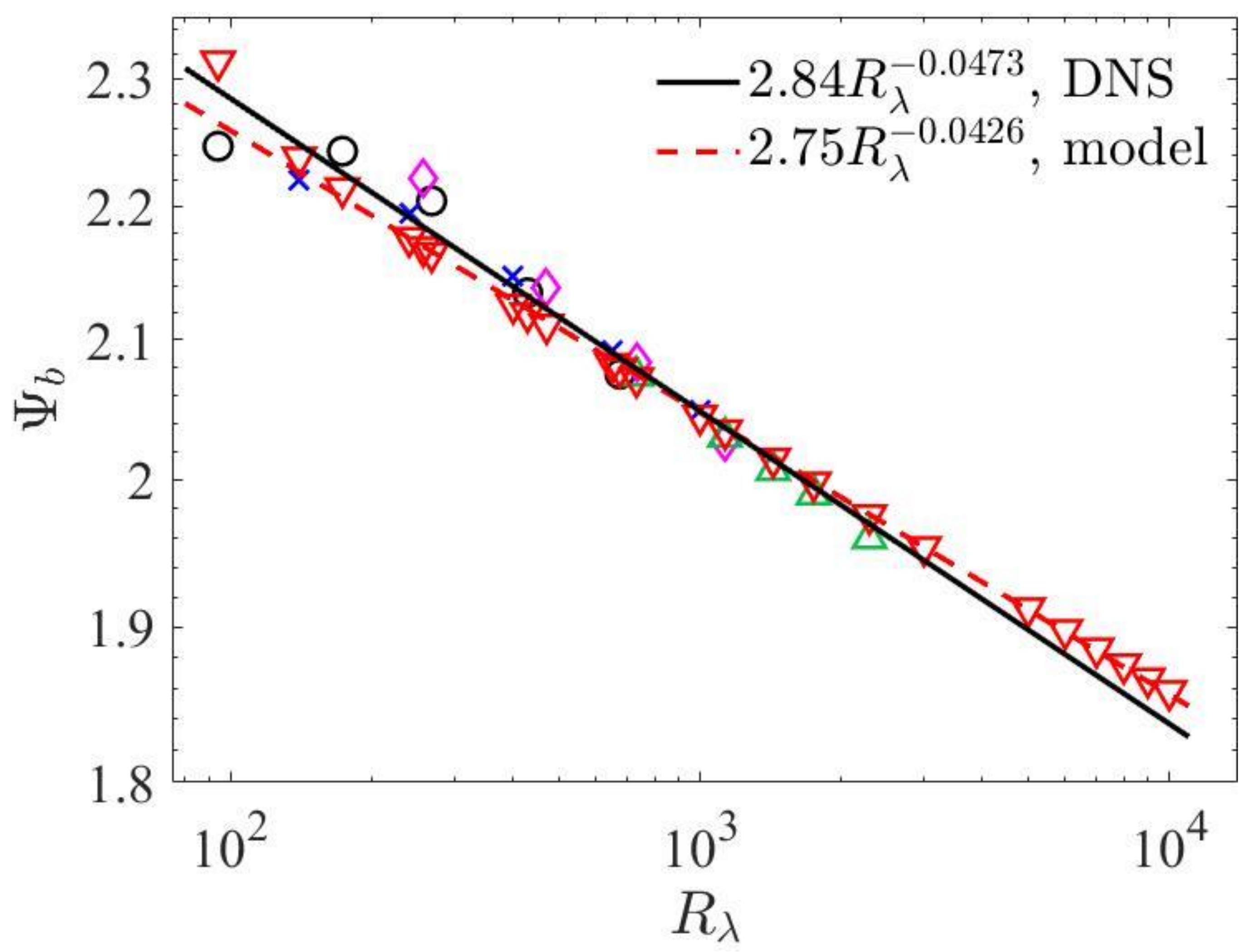
$$\Rightarrow A=(15C_2)^{3/2}, B=(2\sqrt{6}/3C_2)^3, C_D=2\sigma^2,$$
$$\alpha=2/3, \beta=1/3$$

引入K62理论的修正：

$$D_2(r)\sim r^{2/3+\mu/9}, \eta\ll r\ll L$$
$$\Rightarrow\alpha=2/3-\mu/18, \beta=1/3+\mu/18$$

- 模型包含Kolmogorov尺度 η 和湍流积分尺度 L 两个长度尺度
- 模型系数通过湍流统计理论解析得到
- 利用K62理论的湍流间歇性因子 μ 对模型的指数进行了修正
- 取 $C_2=2.20$与 $\mu=0.25$ 以改进拟合效果

模型结果



DNS数据与本模型给出的鼓包峰值高度.

DNS来源 ×：[1] ○：[2] ◊：[3] △：[4]

理论推导

$\Psi(k\eta)$ 可由二阶纵向结构函数显式表达：

$$\Psi(\kappa)=\frac{R_\lambda}{\sqrt{15\pi}}\kappa^{14/3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}\int_0^\infty\frac{f(\xi,\kappa)}{\kappa}\cos\xi\mathrm{d}\xi\right)$$

$$f(\xi,\kappa)\equiv1-\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+A\kappa^2}\right)^\alpha\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+(20/3)^{-3/2}R_\lambda^3B\kappa^2}\right)^\beta, \kappa\equiv k\eta, \xi\equiv kr$$

不同 R_λ 下 $\Psi(k\eta)$ 的比值估计：

$$\frac{\Psi(R_{\lambda1},\kappa)}{\Psi(R_{\lambda2},\kappa)}\sim\frac{R_{\lambda1}}{R_{\lambda2}}\left(\frac{\xi^2+(20/3)^{-3/2}R_{\lambda2}^3B\kappa^2}{\xi^2+(20/3)^{-3/2}R_{\lambda1}^3B\kappa^2}\right)^\beta\sim\left(\frac{R_{\lambda1}}{R_{\lambda2}}\right)^{1-3\beta}\sim\left(\frac{R_{\lambda1}}{R_{\lambda2}}\right)^{-\mu/6}$$

- 式中的导数对 R_λ 线性
- 推导过程中假定鼓包位置 κ 恒定
- 积分的结果主要由小 ξ 给出
- 将积分的比值估计为被积函数的比值
- $\mu/6\approx0.04$，与已有研究相符 [1，5]

结论

- 给出了较简洁的 D_{LL} 模型以预测瓶颈效应
- 模型给出的鼓包高度结果与DNS数据符合较好
- 基于模型，可以对 $\Psi_b\sim R_\lambda^{-\mu/6}$ 做出一定的理论解释

参考文献

[1] D. A. Donzis and K. R. Sreenivasan, J. Fluid Mech., 657:171–188,2010.

[2] T. Ishihara, Y. Kaneda, M. Yokokawa, K. Itakura, and A. Uno, J. Phys.Soc. Jpn., 74:1464–1471, 2005.

[3] T. Ishihara, T. Gotoh, and Y. Kaneda, Annu. Rev. Fluid Mech., 41:165–180, 2009.

[4] T. Ishihara, K. Morishita, M. Yokokawa, A. Uno, and Y. Kaneda, Phys. Rev. Fluids, 1:082403, 2016.

[5] J. Meyers and C. Meneveau, Phys. Fluids, 20:065109, 2008.

-本研究由国家自然科学基金资助